

Φυλλάδιο α

24/5/18

Ας θεωρήσουμε μια αλγεβρική καμπύλη:
 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ (*)

Μπορούμε να μεταφερούμε σε αλλοδαπές μορφές των (*) χρησιμοποιώντας τετραγωνικές μορφές

1. Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή

$Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ με πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

2. Διαγωνοποιούμε τον πίνακα A. Άρα με μια βάση $\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$ ο A θα έχει τη μορφή

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

και η Q θα γράφεται

$$Q(x', y') = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 \quad \text{όπου}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (*) \quad \text{όπου } P \text{ πίνακας μεταβάσεως.}$$

Η αρχική εξίσωση γράφεται:

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Αντικαθιστώντας από (*) τα x και y και με συμπλήρωση τετραγώνων καταλήγουμε σε αναγνωρίσιμη μορφή.

$$\max \{ 0, \in \mathbb{R}, 0, 3, 5 \}$$

1.1 Τι παριστάνουν στο Oxy επίπεδο οι παρακάτω εξισώσεις:

(α) $x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0$

(β) $x^2 + xy - y^2 - 2x - y + 1 = 0$

(γ) $2y^2 - 8x + 4y - 1 = 0$

Πύση: (α) Παρατηρώ ότι η τετραγωνική μορφή:
 $Q(x,y) = x^2 - 4y^2$ έχει πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$
με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -4$ άρα παριστάνει
υπερβολή

(β) Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή:
 $Q(x,y) = x^2 + xy - y^2$ με πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$
• Υπολογισμός ιδιοτιμών:

$$\begin{aligned} \text{Θεωρούμε την εξίσωση } 0 &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -(1-\lambda)(1+\lambda) - \frac{1}{4} \Rightarrow 0 = \lambda^2 - \frac{5}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda^2 - \frac{5}{4} &= 0 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Οπότε η εξίσωση παριστάνει υπερβολή

(γ) (Δεν ~~είναι~~ ο ~~πρό~~ όρος x^2 , άρα η μία ιδιοτιμή είναι το 0)

Με συμπλήρωση τετραγώνων έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 0 &= 2y^2 + 4y - 8x - 1 = 2(y^2 + 2y + 1) - 8x - 1 = \\ &= 2(\underbrace{y+1}_y)^2 - 8x - 3 = 2(\underbrace{y+1}_y)^2 - 8(\underbrace{x+\frac{3}{8}}_x) \end{aligned}$$

Θέτουμε $X = x + 3/8$
 $Y = y + 1$

η εξίσωση γίνεται

$$X = \frac{1}{4} Y^2$$

παρεβολή

1.2 Να βρεθεί η εκκεντρότητα, τα μήκη των ημιαξόνων καθώς και α τιμές των παραμέτρων κωνικών τομών:

(α) $2xy = 1$

(β) $5x^2 - 6\sqrt{3}xy - y^2 + 16 = 0$

(γ) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$

Λύση: (α) θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $Q(x,y) = 2xy$ με πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

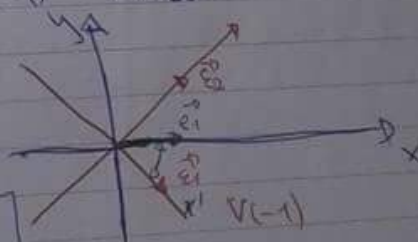
• Εύρεση ιδιοτιμών: θεωρούμε την εξίσωση:
 $0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$

• Υπολογισμός ιδιοχώρων: Ας υπολογίσουμε το $V(-1)$. θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Μία οκ βάση του $V(-1)$ είναι:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1)$$



Από θεωρία γνωρίζουμε ότι $V(1) \perp V(-1)$ το $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1)$

Είναι οκβ του $V(1)$. Ο πίνακας μεταβάσεως είναι ο $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$

Στη νέα βάση $\{\bar{e}_1^p, \bar{e}_2^p\}$ η εξίσωση λαμβάνει τη μορφή: $\boxed{-(x')^2 + (y')^2 = 1}$

$$\begin{aligned} a &= 1 & c &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2} \\ b &= 1 & e &= \frac{c}{a} = \sqrt{2} \\ & & \uparrow & \\ & & a & \end{aligned}$$

Εκκεντρότητα

Σχόλιο: Έστω φ η γωνία στροφής των αξόνων από το Oxy στο $Ox'y'$, τότε:

$$\cos \theta = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1^p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle (1, -1), (1, 0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = -\frac{\pi}{4}} \quad (\text{Επειδή η στροφή είναι προς τα κάτω επιλέγω } \theta = -\pi/4)$$

1.6 Στο επίπεδο Oxy δίνεται η εξίσωση: $\boxed{x^2 - 4xy + y^2 - 2\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y - 8 = 0}$

- Νόο η εξίσωση παριστάνει υπερβολή
- Ν-β. Η μαζονες και εκκεντρότητα
- Να σχεδιάσετε την καμπύλη στο Oxy επίπεδο
- Να βρεθούν οι εξισώσεις των ασύμπτωτων στο Oxy επίπεδο

Λύση (α) Θεωρούμε τη τετραγωνική μορφή:

$$Q(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 \quad \text{με πίνακα:}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

• Εύρεση ιδιοτιμών: Θεωρούμε την εξίσωση:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -1} \quad \text{και} \quad \boxed{\lambda_2 = 3}$$

→ D

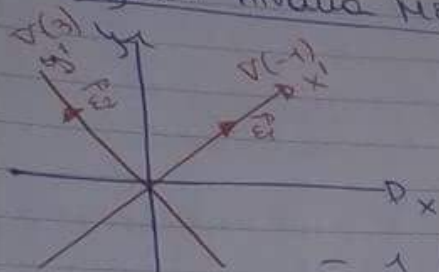
• Εύρεση ιδιοχώρων. Ας υποθέσουμε το $V(-1)$ έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Αρα μια ΟΚΒ αποτελείται από ιδιοδιανύσματα είναι: $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1)$ ή $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1)$

• Εύρεση πίνακα μεταβάσης: Είναι 0

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Αρα στο νέο σύστημα $\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

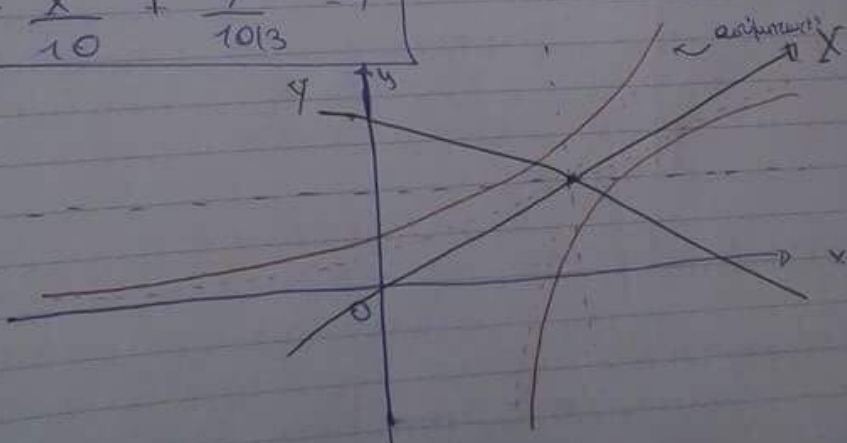
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x' - y' \\ x' + y' \end{pmatrix} \quad (*)$$

Η εξίσωση λαμβάνει τη μορφή: $0 = -(x')^2 + 3(y')^2 + 2x' - 6y' - 8$ ή ελλειψοειδές τετράγωνο

$$= -(x' - 1)^2 + 3(y' - 1)^2 - 10 = 0$$

Θέτουμε $X = x' - 1$, $Y = y' - 1$ λαμβάνουμε

$$\sqrt{-\frac{X^2}{10} + \frac{Y^2}{10/3}} = 1$$



Οι ασύμπτωτες στο KXY επίπεδο όπου $K(1,1)$
είναι: $\boxed{X \pm \sqrt{3} Y = 0}$

Θέλουμε να βρούμε τις ασύμπτωτες στο
αρχικό σύστημα Oxy . Όπως: $X = x' - 1, Y = y' - 1$

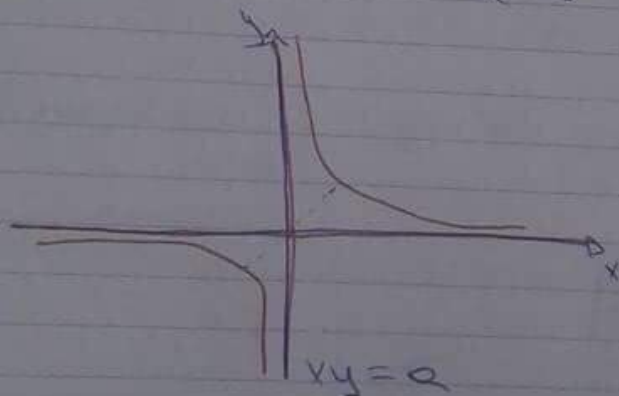
$$\Rightarrow (x' - 1) \pm \sqrt{3}(y' - 1) = 0$$

$$\text{Έχουμε: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε:
 $(1 \pm \sqrt{3})x + (1 \pm \sqrt{3})y = 0$

Παρατήρηση: Αν υποθέσουμε ότι έχουμε την
εξίσωση: $\boxed{3x^2 + 3y^2 - 10xy + 4x + 4y - 4 + 8\lambda = 0}$

Οι ιδιοτιμές του $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ είναι: $\boxed{\lambda_1 = -2}$ και $\boxed{\lambda_2 = 8}$



$$-2(x' - x_0)^2 + 8(y' - y_0)^2 = \frac{k - 8\lambda}{\text{το ίδιο ποσό}}$$

Για να παριστάνει ζεύγος ευθειών θα πρέπει
να μην υπάρχει σταθερός όρος. Άρα: